Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas

Prova de Seleção

Universidade Federal de Lavras

Outubro de 2009

Nome:

ATENÇÃO!
- Justifique suas respostas.
- Responda as questões no quadro correspondente.
- Usar os versos das folhas como **rascunho**.
- **Os rascunhos não serão corrigidos!**

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Final	

Introdução:

A sardinha do Pacífico (*Sardinops sagax caerulea*) tem experimentado longos ciclos de abundância e rareamento na Costa Oeste da Califórnia. Foi durante um período de abundância, de 1920 a 1951, que a indústria da pesca e do processamento da sardinha se desenvolveu fortemente. A pesca total na Costa da Califórnia alcançou um pico de 726124 toneladas durante a estação de pesca de 1936-1937 (de junho a maio). A população começou então um grave período de declínio, a partir de 1940, alcançando em 1959 uma biomassa[a] estimada de 5% (0.2 milhões de toneladas) do nível de 1934 (4 milhões de toneladas). Existe uma concordância geral de que a pesca indiscriminada desempenhou um papel importante na dizimação da sardinha do Pacífico durante este período. A indústria de pesca teve um sério declínio após a estação de pesca de 1950.

Após 50 anos de pesca, um período de moratória foi imposto pela legislação da Califórnia em 1967. A partir de 1980 a população começou a dar sinais de recuperação, apesar da abundância ainda não ser equivalente a de 1930.

Identificando as variáveis do problema

Acontece que tende a haver ciclos de longo alcance para as sardinhas do Pacífico. Esses ciclos ainda não estão completamente compreendidos, porém é certo que fatores tais como temperatura do oceano, disponibilidade de nutrientes em águas profundas, correntes de migração, população de predadores e leões marinhos, e é claro, a pesca, desempenham um papel vital nestes ciclos. Queremos tratar aqui o período em que ocorreu a pesca em larga escala. Devido ao grande impacto deste processo de pesca indiscriminada, seu efeito pode ser considerado dominante neste intervalo de tempo, 1941-1951 e, com isso, os demais efeitos podem ser desprezados numa primeira abordagem.

Quais são as informações relevantes até aqui para que possamos fazer uma análise do comportamento da população de sardinhas durante este período de tempo? Ao responder a essa pergunta estaremos identificando as variáveis e parâmetros necessários para a construção do que chamamos de modelo matemático. Neste caso temos que a biomassa da sardinha é a variável de estado (em milhões de toneladas), e os parâmetros são: taxa de crescimento da população (em milhões de toneladas por ano), a biomassa máxima ou capacidade de duporte do meio (em milhões de toneladas) e a taxa de pesca (em milhões de toneladas por ano).

Com as variáveis e os parâmetros identificados, o próximo passo é construir uma equação para a taxa de variação da variável de estado em função da própria variável de estado, dos parâmetros do modelo e, possivelmente, do tempo. Essa equação será uma equação diferencial ordinária (EDO).

Representando a biomassa de sardinha presente num dado instante de tempo por $S(t)$, a taxa de crescimento da população por r, considerada constante, a capacidade de suporte como K, também constante, e a taxa de pesca como P, poderemos construir diferentes relações que poderão ser utilizadas para descrever o comportamento da população.

[a] A biomassa é a quantidade de um determinado organismo em seu habitat.

1.a) As informações biológicas sugerem que é razoável assumir que a taxa de variação da biomassa seja proporcional a quantidade de sardinhas presentes num dado instante, sendo esta constante de proporcionalidade dada pela taxa de crescimento da população, para a situação sem interferência dos fatores externos tais como a pesca. Como primeira aproximação, então, vamos considerar que a pesca possa ser desprezada.

Qual é a equação diferencial que descreve a taxa de variação da biomassa de sardinhas com o tempo nesta primeira aproximação?

1.b) Resolva essa equação considerando que a taxa de crescimento da biomassa é $r = 0.20$ e que $S(0) = 1.0$.

1.c) Construa um esboço para essa solução. Quais são as características relevantes. Este resultado está em concordância com os dados do período considerado?

2.a) Vamos agora começar a tornar o modelo um pouco mais realista incluindo a limitação do ambiente, isto é, a capacidade de suporte K. Para isso, vamos considerar que a taxa de variação da biomassa será proporcional a diferença entre essa capacidade de suporte e a biomassa presente naquele instante. Considere $K = 6.0$

Escreva a equação diferencial nesta nova situação.

2.b) Resolva essa nova equação considerando $r = 0.20$ e $S(0) = 1$ e depois $S(0) = 12$.

2.c) Construa um esboço para essas soluções no mesmo par de eixos coordenados. Quais são as características relevantes. Este resultado está em concordância qualitativa com os dados do período considerado? Qual o papel da capacidade de suporte?

3. a) Combinando os dois modelos anteriores obtemos o chamado modelo logístico ou modelo de Verhulst[a]. Esse modelo é dado por

$$\frac{dS}{dt} = r\, S\, \frac{K - S}{K} \tag{1}$$

Resolva esta nova equação e esboce a solução considerando $S(0) = 1$, $r = 0.2$ e $K = 6$. Ressalte as diferenças entre as abordagens utilizadas.

[a] P. F. Verhulst, matemático e biólogo belga do século 19.

3. b) Nas abordagens anteriores não foi incluído o fator de pesca. Isso pode ser feito considerando, por exemplo, que a pesca ocorre a uma taxa fixa, independente da quantidade de sardinha presente. Inclua esse fator na equação do modelo de Verhulst.

A simples inclusão deste fator de retirada de biomassa na equação logística faz com que apareça na solução os ciclos de crescimento e decrescimento não observados no modelo puramente logístico. No entanto, essa nova equação não é de fácil solução.

4 Quando trabalhamos com sistemas dinâmicos é comum aparecerem sistemas com várias equações diferenciais, que devem ser resolvidas em conjunto, a fim de descrevermos a evolução temporal destes sistemas. Considere o seguinte caso geral:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) + by(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= cx(t) + dy(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Esse sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \vec{A}\vec{z}(t) \tag{3}$$

sendo

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

e

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

As soluções destes tipos de sistemas serão da forma

$$\vec{z}(t) = k_1 \begin{pmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + k_2 \begin{pmatrix} x_{02} \\ y_{02} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

sendo k_1 e k_2 constantes que dependem das condições iniciais do problema. Os números λ_1 e λ_2 são os autovalores associados aos autovetores $\vec{z}_{01}$ e $\vec{z}_{02}$ da matriz $\vec{A}$.

4 Determine os autovalores e os autovetores para o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -x(t) + 2y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 3y(t) \end{aligned} \tag{4}$$